INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

3.ª Prática – Modelagem com o Software Simulink

OBJETIVO:

1) Aprender a simular Equações Diferenciais EDO de 1.a e 2.a ordem.

2) Fazer a modelagem e a simulação de um pêndulo não linear

DATA: ____/______________/______.

Nome dos alunos:

Outubro/2018

9

SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

A simulação de um sistema consiste na solução de suas equações diferenciais para condições iniciais e condições de contorno diferentes de zero. Condições de contorno são as entradas do sistema. Neste Capítulo será visto como se pode utilizar o MATLAB para resolver equações diferenciais não lineares. No MATLAB, há diversas funções, chamadas *solucionadores*, do inglês *solvers*, que utilizam o método Runge-Kutta em passo variável para resolver equações diferenciais numericamente. Os dois solucionadores mais utilizados são a função `ode45` e a função `ode15s`. A função básica, e que deve ser sempre testada primeiro, é a `ode45`, que utiliza combinação dos métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem. Se a solução da equação com esse solucionador apresentar problema de convergência ou erro, então utlize a ou, a função `ode15s`.

A sintaxe para para equações diferenciais de primeira ou segunda ordem é basicamente a mesma. No entanto, os arquivos .m são bastante diferentes.

9.1 EDO DE PRIMEIRA ORDEM

Para equações diferenciais de primeira ordem, do tipo,

$$\dot{y} = f(t, y) \qquad y(t_0) = y_0 \tag{7}$$

a sintaxe básica para `ode45`,

» `[tout,yout]=ode45(@ydot,tspan,y0,options);`

onde `@xdot` é uma `function` cujas entradas são t, y e a saída é um vetor coluna (número de linhas igual à ordem da equação) que representa dy/dt, isto é, $f(t, y)$. O vetor `tspan=[t0, tf]` define o intervalo de tempo da simulação[1]; e `y0` é a condição inicial. O argumento `options` refere-se aos recursos avançados dos solucionadores, e não serão tratados aqui. Procure na Internet informações sobre o argumento, que é criado com a função `odeset`.

Enfim, essa função integra o sistema de equações diferenciais definido por $\dot{y} = f(t, y)$ do tempo inicial `t0` ao tempo final `tf` com condições iniciais `y0`. Melhor maneira de entender essa confusão toda é com um exemplo...

Dado o sistema descrito pela Equação 7:

$$\begin{cases} t^2\dot{y} &= y + 3t \\ y(1) &= -2 \end{cases} \qquad 1 \leqslant t \leqslant 4;$$

Inicialmente, cria-se a função `ydot`,

```
function  dydt= ydot(y,t);
  dydt=(y+3*t)/t^2;
end
```

A condição inicial dada é que $y = -2$ para $t = 1$ e queremos integrar $1 \leqslant t \leqslant 4$. O seguinte conjunto de comandos mostra explicitamente a solução,

```
tspan = [1 4];                          %vetor intervalo de integracao
y0 = -2;                                %condicao inicial
```

1 Quaisquer valores intermediários específicos entre `t0` e `tf` em que se deseja saber a solução podem ser adicionados em `tspan`, utilizando `tspan = [t0, t1, t2, ..., tf]`

```
[tout,yout] = ode45(@ydot,tspan,y0); %resolve o problema
plot(yout,tout)
```

9.2 EDO DE SEGUNDA ORDEM

Para resolver uma equação de segunda ordem (ou superior) com os solucionadores de EDO do MATLAB você deve, inicialmente, escrever as equações na forma de variáveis de estado. Considere o exemplo,

$$5\ddot{y} + 7\dot{y} + 4y = u(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 6$$

para $u(t) = \sin(t)$ e condições iniciais $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 9$.

Define-se duas novas variáveis, x_1 e x_2 de modo que,

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{1}{5}u(t) - \frac{4}{5}x_1 - \frac{7}{5}x_2$$

Próximo passo é criar uma função que calcule os valores de $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ e armazene-os em um vetor coluna,

```
function xdot=estado_1(t,x)
xdot=[x(2); (1/5)*(sin(t)-4*x(1)-7*x(2))];
```

E, para utilizar a função `ode45`,

» `[t,x]=ode45(@estado_1,[0,6],[3,9]);`

Para plotar as duas funções x_1 e x_2 versus t, utilize a função `plot(t,x)`; para plotar apenas $y = x_1$ digite `plot(t,x(:,1))`.

9.3 MODELO DE UM PÊNDULO NÃO LINEAR

Esta seção é um resumo do exemplo apresentado em Palm III [4], capítulo 9, páginas 389-392. O exemplo refere-se a um pêndulo de massa m concentrada na extremidade de uma haste de massa desprezível, mostrado na Figura 25. A equação de movimento do sistema é,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

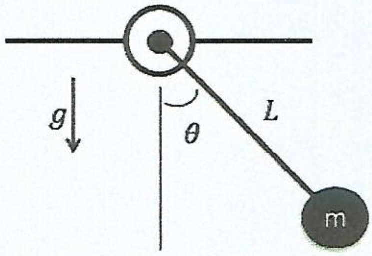

Figura 25: Pêndulo.

Suponha $L = 1m$ e $g = 9,81m/s^2$. Utiza-se o MATLAB para resolver a equação para $\theta(t)$ em dois casos: $\theta(0) = 0,5rad$ e $\theta(0) = 0,8\pi rad$, sempre com $\dot{\theta}(0) = 0$.

9.3.1 *Linearização do problema*

Para ângulos pequenos, $\sin\theta \approx \theta$, tornando a equação linear,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

cuja solução é trivial,

$$\theta(t) = \theta(0)\cos\sqrt{\frac{g}{L}}t$$

para $\dot{\theta}(0) = 0$. Assim, a amplitude de oscilação é $\theta(0)$ e o período é $T = 2\pi\sqrt{L/g} = 2,006s$

9.3.2 *Equações de estado*

Sejam $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$,

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin x_1$$

Dessa forma, soluciona-se os dois casos propostos gerando a `function`,

```
function xdot=pendulum(t,x)
 g=9.81;  L=1;
 xdot=[x(2); -(g/L)*sin(x(1))];
end
```

e os comandos (cuidado com o comando `gtext`, aprenda a usá-lo),

```
[ta,xa]=ode45(@pendulum,[0,5],[0.5,0]);
[tb,xb]=ode45(@pendulum,[0,5],[0.8*pi,0]);
plot(ta,xa(:,1),tb,xb(:,1));
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Angulo [rad]');
gtext('Caso i'),gtext('Caso 2');
```

A solução está ilustrada na Figura 26.

9.4 SISTEMA DE VÁRIAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES ACOPLADAS

Para o seguinte sistema acoplado de equações diferenciais,

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \dot{x} + \dot{y} + \cos y \\ \ddot{x} &= \dot{y}^2 + \tan y \end{aligned} \tag{8}$$

A solução, via MATLAB, é a seguinte (Figura 27),

```
couplode = @(t,y) [y(2); y(4)^2 + tan(y(3)); y(4); cos(y(3)) + y(2) ...
    + y(4)];
[t,y] = ode45(couplode, [0 0.4999*pi], [0;0;0;0]);
figure(1)
plot(t, y)
grid
str = {'$$ \dot{y} $$', '$$ y $$', '$$ \dot{x} $$', '$$ x $$'};
legend(str, 'Interpreter','latex', 'Location','NW')
```

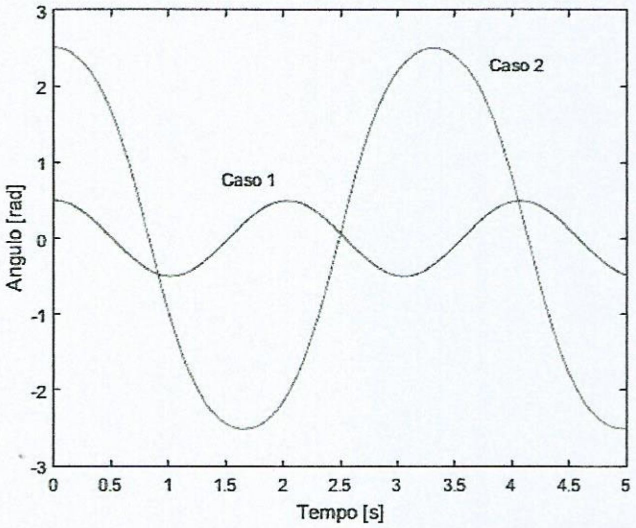

Figura 26: Solução do pêndulo para duas condições iniciais.

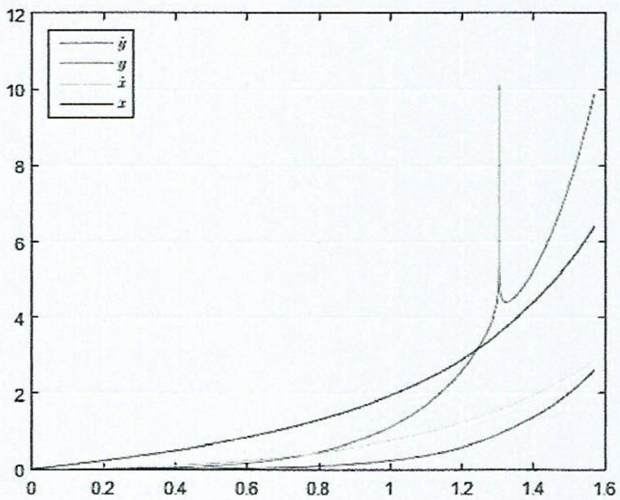

Figura 27: SOlução do sistema acoplado de equações diferenciais dado pela Equação 8.